JURNAL GAUSSIAN, Volume 1, Nomor 1, Tahun 2012, Halaman 39-46
Online di: http://ejournal-s1.undip.ac.id/index.php/gaussian

# RANCANGAN *D-OPTIMAL* LOKAL UNTUK REGRESI POLINOMIAL ORDE 3 DENGAN HETEROSKEDASTISITAS

**Arya Fendha Ibnu Shina[1], Tatik Widiharih[2], Triastuti Wuryandari[3]**
[1] Mahasiswa Jurusan Statistika FSM Universitas Diponegoro
[2,3] Staf Pengajar Jurusan Statistika FSM Universitas Diponegoro

**Abstrak**

Kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi di berbagai bidang menuntut adanya rancangan percobaan yang efisien. Rancangan *D-optimal* merupakan rancangan yang efisien. Dalam suatu percobaan yang menggunakan model regresi polinomial orde 3 dengan heteroskedastisitas dengan fungsi bobot $\lambda(x) = (1 - x^2)$, rancangan *D-optimal* dan polinomial Jacobi menghasilkan titik-titik rancangan yang akan dicobakan. Suatu rancangan yang terdiri dari titik-titik rancangan dengan proporsi pengamatan yang menghasilkan determinan matriks rancangan maksimal merupakan rancangan *D-Optimal*. Rancangan *D-optimal* yang memiliki nilai variansi terstandardisasi sama dengan jumlah parameter di setiap titiknya, merupakan rancangan *D-optimal* lokal.

**Kata Kunci** : *D-optimal*, Regresi polinomial, Polinomial Jacobi

## 1. Pendahuluan

Analisis statistika yang digunakan untuk menentukan model pola hubungan antara variabel faktor X dengan variabel respon Y adalah analisis regresi. Analisis regresi merupakan alat statistik yang sering digunakan di berbagai bidang. Secara umum, model regresi polinomial orde $d$ dengan $n$ pengamatan adalah :

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{d} \beta_j x_i^j + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \ldots \ldots, n. \tag{1}$$

(Antille *et al.* 2003).

Dengan asumsi $\varepsilon_i$ berdistribusi normal dengan rata-rata 0, variansi $\sigma^2$, dan saling independen. Dalam makalah hanya akan dibatasi pada kasus regresi polinomial orde 3 terboboti (heterokedastisitas) dengan fungsi bobot yang dipilih adalah $\lambda(x) = (1 - x^2)$.

Untuk menentukan pola hubungan antara variabel faktor X dan variabel respon Y diperlukan suatu rancangan yang sesuai sehingga dihasilkan inferensi statistika yang dapat memaksimalkan informasi yang diperlukan. Oleh karena itu digunakan rancangan optimal. Dengan rancangan optimal, akan ditentukan titik-titik rancangan dari variabel prediktor X. Pengamatan cukup dilakukan pada titik-titik rancangan tersebut. Dengan alasan ini rancangan optimal disebut sebagai rancangan percobaan yang efisien.

Rancangan dibentuk oleh titik-titik rancangan dengan masing-masing proporsi pengamatannya. Dari rancangan tersebut selanjutnya akan dibentuk matriks rancangan. Atkinson *et al*. (2007) mengatakan bahwa ada beberapa kriteria dalam rancangan optimal yaitu kriteria *A-optimal, E-optimal, D-optimal,* dan *G-optimal*. Kriteria *A-optimal* meminimalkan trace dari invers matriks rancangan, kriteria *E-optimal* meminimalkan nilai eigen yang maksimal dari matriks rancangan, kriteria *D-optimal* memaksimalkan determinan dari matriks rancangan, sedangkan *G-optimal* meminimalkan variansi terstandardisasi yang maksimal. Pada makalah ini akan dibahas salah satu kriteria rancangan optimal yang paling populer, yaitu rancangan *D-optimal*.

Rancangan *D-optimal* menekankan pada kualitas dari estimasi parameter. Harapan dari pengoptimalan ini adalah mendapatkan nilai $Var\left(\hat{\beta}\right)$ yang minimum. Pada kasus regresi polinomial orde 3 dengan heterokedastisitas, hal ini dapat dicapai dengan memaksimalkan determinan matriks rancangannya, yaitu $|\mathbf{M}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})|$ atau meminimalkan invers matriks rancangan, yaitu $(\mathbf{M}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}))^{-\mathbf{1}}$. Matriks rancangan $\mathbf{M}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ dibentuk dari titik-titik rancangan yang telah didapatkan (Atkinson *et al*. 2007).

## 2. Regresi Polinomial Orde 3 dengan Heterokedastisitas

Model regresi polinomial orde 3 dengan heterokedastisitas merupakan model regresi polinomial orde 3 yang memiliki fungsi bobot sehingga sering juga disebut model regresi polinomial orde 3 terboboti. Model regresi polinomial orde 3 terboboti adalah sebagai berikut,

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{3} \beta_j x_i^j + \varepsilon_i, \qquad i = 1, 2, \dots \dots .., n$$

$$Var[\varepsilon] = \frac{\sigma^2}{\lambda(x)}$$

dengan fungsi bobot $\lambda(x)$ yang dipilih, yaitu :

$$\lambda(x) = (1-x)^{\alpha+1}\,(1+x)^{\beta+1};\; x = (-1{,}1);\; (\alpha, \beta > -1)\,. \qquad (2)$$

Dalam tulisan ini hanya dibatasi untuk nilai $\alpha = 0$ dan $\beta = 0$, sehingga fungsi bobotnya menjadi :

$$\lambda(x) = (1 - x^2).$$

Jika terjadi heterokedastisitas sedangkan asumsi-asumsi lain terpenuhi, maka penaksiran dengan OLS tetap tak bias dan konsisten tetapi penaksir tidak lagi efisien baik dalam sampel kecil maupun besar. Dengan perkataan lain, dalam penyampelan berulang penaksir OLS secara rata-rata sama dengan nilai populasi sebenarnya (sifat tak bias), dan dengan meningkatnya ukuran sampel sampai tak terhingga penaksiran mengarah pada sebenarnya (sifat konsisten) tetapi variansi $\widehat{\beta_J}$ tidak lagi minimum bahkan jika besarnya sampel meningkat secara tak terbatas. Variansi yang tidak minimum ini mengakibatkan selang kepercayaan untuk $\widehat{\beta_J}$ menjadi lebar (Gujarati,1978).

Untuk mengestimasi parameter pada model regresi polinomial orde 3 dengan heterokedastisitas digunakan Weighted Least Square (WLS) (Gujarati,1978). Hasil estimasi parameter menggunakan WLS adalah sebagai berikut :

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X^T \lambda X})^{-\mathbf{1}}\, \boldsymbol{X^T \lambda Y}. \qquad (3)$$

Dengan syarat matriks $\boldsymbol{X^T \lambda X}$ merupakan matriks non-singular dan digunakan model tetap. Maka variansi $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ , yaitu :

$$Var\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right) = (\boldsymbol{X^T \lambda X})^{-\mathbf{1}}\, \sigma^2. \qquad (4)$$

Dari persamaan (4) dapat disimpulkan bahwa $Var\,(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ akan minimum jika determinan matriks informasinya, yaitu $|\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{\lambda X}|$ maksimum**.** Rancangan yang memaksimalkan determinan matriks informasi adalah rancangan *D-Optimal*.

## 3. Polinomial Jacobi

Polinomial Jacobi disebut juga polinomial hipergeometrik disimbolkan dengan $P_d^{(\alpha,\beta)}$ . Polinomial Jacobi ditemukan oleh Carl Gustav Jacob Jacobi. Menurut Antille *et al.* (2001) Polinomial Jacobi $P_d^{(\alpha,\beta)}(x)$ didefinisikan dengan formula Rodrigues sebagai berikut,

$$P_d^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^d}{2^d d!}\,(1-x)^{-\alpha}\,(1+x)^{-\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^d\left[(1-x)^{\alpha+d}\,(1+x)^{\beta+d}\right], \quad (5)$$

dengan $\alpha, \beta > -1$.

Polinomial Jacobi dinormalisasi menjadi,

$$P_d^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{d+\alpha}{d}. \quad (6)$$

Polinomial Jacobi $P_d^{(0,0)}(x)$ untuk $d = 0$ sampai dengan $d = 5$ adalah sebagai berikut :

1. $P_0^{(0,0)}(x) = 1$
2. $P_1^{(0,0)}(x) = x$
3. $P_2^{(0,0)}(x) = \frac{1}{2}\,(3x^2 - 1)$
4. $P_3^{(0,0)}(x) = \frac{1}{2}\,(5x^3 - 3x)$
5. $P_4^{(0,0)}(x) = \frac{1}{8}\,(35x^4 - 30x^2 + 3)$
6. $P_5^{(0,0)}(x) = \frac{1}{8}\,(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

Polinomial Jacobi juga memenuhi sifat ortogonal, yaitu ortogonal pada interval $-1 \le x \le 1$ dan pada fungsi bobot $\lambda(x) = (1-x)^\alpha\,(1-x)^\beta$. Ortogonalitas tersebut diperlihatkan pada integrasi berikut ini:

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha\,(1-x)^\beta P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx$$

$$= \begin{cases} 0 & m \ne n \\ \dfrac{2^{\alpha+\beta+1}}{2d+\alpha+\beta+1}\,\dfrac{\Gamma(d+\alpha+1)\Gamma(d+\beta+1)}{\Gamma(d+\alpha+\beta+1)d!} & m = n \end{cases}$$

(http://mathworld.wolfram.com/JacobiPolynomial.html)

## 4. Rancangan *D-optimal* untuk Regresi Polinomial Orde 3 dengan Heterokedastisitas

### 4.1. Rancangan ($\xi$)

Untuk model regresi polinomial orde 3 dengan heterokedastisitas, rancangan $\xi$ digambarkan sebagai berikut :

$$\xi = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_p \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_p \end{bmatrix}.$$

dengan *p* merupakan titik rancangan yang jumlahnya sama dengan jumlah parameter. Jadi model regresi polinomial orde 3 terboboti memiliki empat titik rancangan dengan bobot optimal $\frac{1}{p} = \frac{1}{4}$. Menurut Antille *et al.* (2001) penentuan titik rancangan untuk model regresi polinomial orde 3 dengan fungsi bobot seperti pada persamaan $(3.1)$, digunakan akar dari polinomial Jacobi

$$P_{d+1}^{(\alpha,\beta)}(x) \,.$$

Karena telah ditentukan nilai $\alpha = 0$ dan $\beta = 0$, maka dengan persamaan $(5)$ polinomial Jacobi $P_{d+1}^{(\alpha,\beta)}(x)$ adalah sebagai berikut:

$$P_4^{(0,0)}(x) = \frac{(-1)^4}{2^4 4!}\ (1-x)^0\ (1+x)^0 \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^4 [(1-x)^4\ (1+x)^4]$$

$$P_4^{(0,0)}(x) = \frac{1}{384}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^4 [(1-x^2)^4\ ]$$

Akar dari polinomial Jacobi tersebut adalah sebagai berikut:

$$\frac{1}{384}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^4 [(1-x^2)^4\ ] = 0$$

dengan,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)[(1-x^2)^4\ ] = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1$$

$$= 8x^7 - 24x^5 + 24x^3 - 8x$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 [(1-x^2)^4\ ] = 56\,x^6 - 120\,x^4 + 72x^2 - 8$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^3 [(1-x^2)^4\ ] = 336x^5 - 480x^3 + 144x$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^4 [(1-x^2)^4\ ] = 1680x^4 - 1440x^2 + 144$$

sehingga,

$$\frac{1}{384}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^4 [(1-x^2)^4\ ] = 0$$

$$\frac{1}{384}\ [1680x^4 - 1440x^2 + 144\ ] = 0$$

$$[1680x^4 - 1440x^2 + 144\ ] = 0$$

dan didapat akar-akarnya sebagai berikut :

$$x_1 = -\frac{1}{35}\sqrt{525 + 70\sqrt{30}} \approx -0{,}861$$

$$x_2 = -\frac{1}{35}\sqrt{525 - 70\sqrt{30}} \approx -0{,}34$$

$$x_3 = \frac{1}{35}\sqrt{525 - 70\sqrt{30}} \approx 0{,}34$$

$$x_4 = \frac{1}{35}\sqrt{525 + 70\sqrt{30}} \approx 0{,}861.$$

Setelah titik rancangan diketahui, maka rancangan optimal $\xi^*$ yang dibentuk adalah sebagai berikut :

$$\xi^* = \begin{bmatrix} -0{,}861 & -0{,}34 & 0{,}34 & 0{,}861 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (7)$$

**4.2. Matriks rancangan M($x, \xi$)**

Matriks rancangan M$(x, \xi)$ untuk model regresi polinomial orde 3 dengan fungsi bobot $\lambda(x)$ adalah sebagai berikut :

$$M(x, \xi) = \int \lambda(x)\, f(x) f^T(x) (d\xi x) \quad (8)$$

dengan $f^T(x_i) = [1 \quad x_i \quad x_i^2 \quad x_i^3]$ dan $\lambda(x) = (1 - x^2)$.

(Atkinson *et al.* 2007)

Persamaan $(3.5)$ dapat ditulis juga menjadi,

$$M(x, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i f^*(x_i) f^{*T}(x_i) \quad (9)$$

dengan $f^{*T}(x_i) = \left[\sqrt{\lambda(x_i)} \quad x_i\sqrt{\lambda(x_i)} \quad x_i^2\sqrt{\lambda(x_i)} \quad x_i^3\sqrt{\lambda(x_i)}\right]$ dan bobot untuk masing-masing titik rancangan $\omega_i = \frac{1}{p} = \frac{1}{4}$. Jadi persamaan (9) jika dijabarkan menjadi persamaan $(10)$ seperti berikut,

$$\mathrm{M}(x, \xi) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4} \omega_i \lambda(x_i) & \sum_{i=1}^{4} \omega_i x_i \lambda(x_i) & \sum_{i=1}^{4} \omega_i x_i^2 \lambda(x_i) & \sum_{i=1}^{4} \omega_i x_i^3 \lambda(x_i) \\ \sum_{i=1}^{4} \omega_i x_i\, \lambda(x_i) & \sum_{i=1}^{4} \omega_i x_i^2\, \lambda(x_i) & \sum_{i=1}^{4} \omega_i x_i^3\, \lambda(x_i) & \sum_{i=1}^{4} \omega_i x_i^4\, \lambda(x_i) \\ \sum_{i=1}^{4} \omega_i x_i^2\, \lambda(x_i) & \sum_{i=1}^{4} \omega_i x_i^3\, \lambda(x_i) & \sum_{i=1}^{4} \omega_i x_i^4\, \lambda(x_i) & \sum_{i=1}^{4} \omega_i x_i^5\, \lambda(x_i) \\ \sum_{i=1}^{4} \omega_i x_i^3\, \lambda(x_i) & \sum_{i=1}^{4} \omega_i x_i^4\, \lambda(x_i) & \sum_{i=1}^{4} \omega_i x_i^5\, \lambda(x_i) & \sum_{i=1}^{4} \omega_i x_i^6\, \lambda(x_i) \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan titik-titik rancangan yang telah diketahui sebelumnya, maka matriks rancangannya adalah sebagai berikut :

$$\mathrm{M}(x, \xi^*) = \begin{bmatrix} 0.571 & 0 & 0{,}147 & 0 \\ 0 & 0{,}147 & 0 & 0{,}077 \\ 0{,}147 & 0 & 0{,}077 & 0 \\ 0 & 0{,}077 & 0 & 0{,}053 \end{bmatrix}$$

Determinan matriks rancangan $\mathrm{M}(x, \xi^*)$ adalah 0,000041630596 $\approx 0{,}000041$. Sedangkan invers dari matriks rancangan optimal $\mathrm{M}^{-1}(x, \xi^*)$ adalah sebagai berikut ,

$$\mathrm{M}^{-1}(x, \xi^*) = \begin{bmatrix} 3{,}444 & 0 & -6{,}575 & 0 \\ 0 & 28{,}464 & 0 & -41{,}353 \\ -6{,}575 & 0 & 25{,}539 & 0 \\ 0 & -41{,}353 & 0 & 78{,}947 \end{bmatrix}$$

### 4.3. Variansi Terstandardisasi $\bar{d}(x, \xi)$

Variansi terstandardisasi untuk regresi polinomial terboboti adalah sebagai berikut :

$$\bar{d}(x,\xi) = \lambda(x_i) f^T(x_i) M^{-1}(x,\xi) f(x_i) \tag{11}$$

dengan $\bar{d}(x,\xi^*) = p$, dimana $\xi^*$ adalah rancangan optimal yang memenuhi kriteria rancangan *D-optimal* lokal. Persamaan (3.8) dapat ditulis juga sebagai berikut :

$$\bar{d}(x,\xi) = f^{*T}(x_i) M^{-1}(x,\xi) f^*(x_i) \tag{12}$$

(Atkinson *et.al*, 2007)

Dengan menggunakan persamaan (11), dihasilkan variansi terstandardisasi dalam bentuk persamaan polinomial, yaitu :

$$\begin{aligned}
\bar{d}(x,\xi^*) &= \lambda(x_i) f^T(x_i) M^{-1}(x,\xi^*) f(x_i) \\
&= [\lambda(x) \quad x\lambda(x) \quad x^2\lambda(x) \quad x^3\lambda(x)] \\
&\quad \times \begin{bmatrix} 3,444 & 0 & -6,575 & 0 \\ 0 & 28,464 & 0 & -41,353 \\ -6,575 & 0 & 25,539 & 0 \\ 0 & -41,353 & 0 & 78,947 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \\
&= [(1-x^2) \quad x(1-x^2) \quad x^2(1-x^2) \quad x^3(1-x^2)] \\
&\quad \times \begin{bmatrix} 3,444 & 0 & -6,575 & 0 \\ 0 & 28,464 & 0 & -41,353 \\ -6,575 & 0 & 25,539 & 0 \\ 0 & -41,353 & 0 & 78,947 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \\
&= 3,444 - 10,019x^2 + 6,575x^4 \\
&\qquad + x(28,464x - 69,817x^3 + 41,353x^5) \\
&\qquad + x^2(-6,575 + 32,114x^2 - 25,239x^4) \\
&\qquad + x^3(-41,353x + 120,301x^3 - 78,947x^5) \\
&= 3,444 + 11,87x^2 - 72,482x^4 + 136,115x^6 - 78,947x^8
\end{aligned}$$

Nilai-nilai ekstrim pada persamaan polinomial dari variansi terstandardisasi tersebut, merupakan akar dari turunan pertama persamaan polinomial varianasi terstandardisasi. Hasil perhitungannya, adalah sebagai berikut :

$$\bar{d}'(x,\xi^*) = 23,74x - 289,929x^3 + 816,691x^5 - 631,579x^7$$

$$23,74x - 289,929x^3 + 816,691x^5 - 631,579x^7 = 0$$

Maka dihasilkan nilai-nilai ekstrim sebagai berikut :

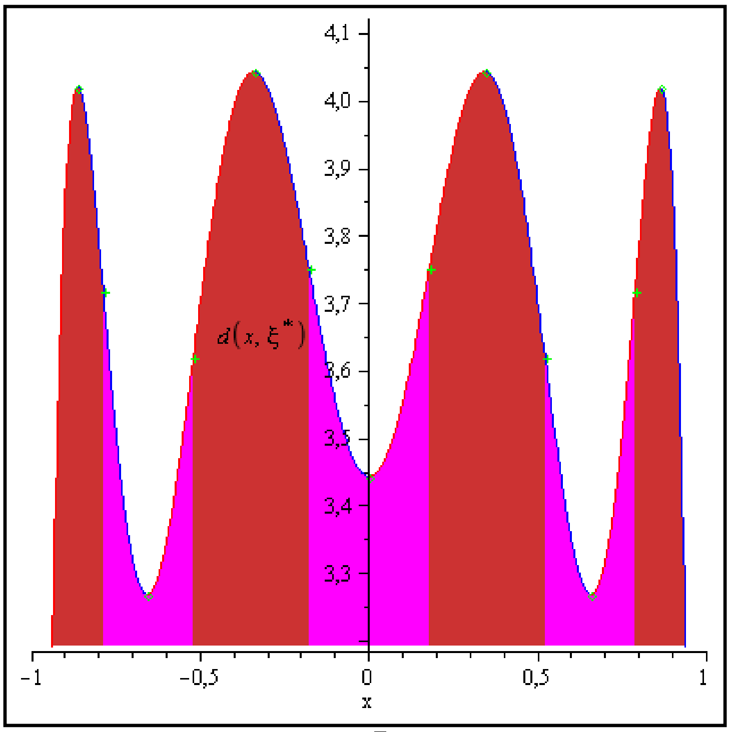
$$x = [-0,861; -0,657; -0,34; 0; 0,34; 0,657; 0,861]$$

Nilai variansi terstandardisasi yang dihasilkan oleh masing-masing nilai ekstrim tersebut adalah sebagai berikut :

1. $\bar{d}(-0,861;\xi^*) = 3,444 + (11,87 \times -0,861^2) - (72,482 \times -0,861^4) + (136,115 \times -0,861^6) - (78,947 \times -0,861^8) = 4,021 \approx 4$
2. $\bar{d}(-0,657;\xi^*) = 3,444 + (11,87 \times -0,657^2) - (72,482 \times -0,657^4) + (136,115 \times -0,657^6) - (78,947 \times -0,657^8) = 3,269$
3. $\bar{d}(-0,34;\xi^*) = 3,444 + (11,87 \times -0,34^2) - (72,482 \times -0,34^4) + (136,115 \times -0,34^6) - (78,947 \times -0,34^8) = 4,044 \approx 4$
4. $\bar{d}(0;\xi^*) = 3,444 + (11,87 \times 0^2) - (72,482 \times 0^4) + (136,115 \times 0^6) - (78,947 \times 0) = 3,444$
5. $\bar{d}(0,34;\xi^*) = 3,444 + (11,87 \times 0,34^2) - (72,482 \times 0,34^4) + (136,115 \times 0,34^6) - (78,947 \times 0,34^8) = 4,044 \approx 4$

6. $\bar{d}(0{,}657;\xi^*) = 3{,}444 + (11{,}87 \times 0{,}657^2) - (72{,}482 \times 0{,}657^4) + (136{,}115 \times 0{,}657^6) - (78{,}947 \times 0{,}657^8) = 3{,}269$
7. $\bar{d}(0{,}861;\xi^*) = 3{,}444 + (11{,}87 \times 0{,}861^2) - (72{,}482 \times 0{,}861^4) + (136{,}115 \times 0{,}861^6) - (78{,}947 \times 0{,}861^8) = 4{,}021 \approx 4$

Perhitungan tersebut, jika divisualisasikan ke dalam plot maka akan dihasilkan plot sebagai berikut :




Gambar 1. Plot variansi terstandardisasi $\bar{d}(x,\xi^*)$ untuk regresi polinomial orde 3 dengan heteroskedastisitas yang mempunyai fungsi bobot $(1 - x^2)$.

Dari perhitungan dan plot pada Gambar 2, terbukti bahwa titik-titik rancangan $x = [= -0{,}861;\ -0{,}34;\ 0{,}34;\ 0{,}861]$ menghasilkan nilai variansi terstandardisasi yang maksimal yaitu $\bar{d}(x,\xi^*) \approx 4$. Jadi rancangan optimal $\xi^*$ memenuhi kriteria rancangan *D-optimal* lokal karena semua nilai variansi terstandardisasi $\bar{d}(x,\xi^*) = p \approx 4$.

## 5. Kesimpulan

Rancangan *D-optimal* untuk model regresi polinomial orde 3 dengan heterokedastisitas yang memiliki fungsi bobot $\lambda(x) = (1 - x^2)$, adalah sebagai berikut :

$$\xi^* = \begin{bmatrix} -0{,}861 & -0{,}34 & 0{,}34 & 0{,}861 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Rancangan *D-optimal* $\xi^*$ juga merupakan rancangan *D-optimal* lokal karena nilai variansi terstandardisasi $\bar{d}(x, \xi^*)$ untuk masing-masing titik design sama dengan jumlah parameter.

**Daftar Pustaka**

Antille, G., 2003, A Note On Rancangan optimal In Weighted Polynomial Regression for The Classical Efficiency Function, *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 113, 285-210.

Atkinson, A. C., Donev, A. N., dan Tobias, R. D., 2007, *Optimum Experimental Design, with SAS,* Oxford University, *Oxford* .

Gujarati, D., 1978, *Ekonometrika Dasar*, Terjemahan Sumarno Zain, Penerbit Erlangga, Jakarta.

http://mathworld.wolfram.com/JacobiPolynomial.html, Diunduh tanggal 7 Maret 2012.

Widiharih, T., 2011, Rancangan optimal untuk Regresi Linier dan Kuadratik, *Prosiding Seminar Nasional Statistika,* Universitas Diponegoro.